Publicación Previa al
VIII Congreso Nacional de Acuicultura
(Santander, mayo 2001)

Modelo aleatorio de crecimiento CCT biparamétrico

Alamar, M.; Estruch, V.; Pastor, J. y Vidal, A.
Departamento de Matemática Aplicada, Escuela Politécnica Superior de Gandia, Universidad Politécnica de Valencia. Cra. Nazaret-Oliva S.N. 46730 Gandia, Valencia (España)

Resumen

Presentamos un modelo matemático, para simular el crecimiento, en peso, de peces. Este modelo se basa en el propuesto por CHO (1992), el cual se fundamenta en un único parámetro: el "*coeficiente de crecimiento térmico*" (*CCT*). La característica fundamental del nuevo modelo es la consideración de un nuevo parámetro, el cual permite disociar la influencia de la temperatura y la de otros factores, en el crecimiento de los peces. El modelo propuesto es aleatorio y se ha implementado en un programa de ordenador, utilizando el lenguaje que proporciona el paquete matemático MATLAB.

Palabras clave: Modelo matemático, coeficiente de crecimiento térmico, crecimiento de peces.

Abstract

We present a mathematical model, to simulate fish growth . This model is based on the one proposed by CHO (1992), which is based on an only parameter: the "*thermal growth coefficient* " *(TGC)*. The fundamental characteristic of the new model is the consideration of a new parameter, which allows to dissociate the influence of the temperature and that of other factors, in the growth of fishes. The proposed model is aleatory and has been implemented in a computer program, using the language that provides the mathematical package MATLAB.

Keywords: Mathematical model, coefficient of thermal growth, fish growth.

Introducción

El crecimiento de los peces está determinado, fundamentalmente, por la cantidad de alimento ingerido y por la temperatura del agua. Los peces, son incapaces de regular su temperatura corporal, por lo que su metabolismo únicamente funciona de forma óptima dentro de un rango de temperaturas adecuadas, dentro del cual la ingestión y el crecimiento son máximos, pero disminuyen cuando la temperatura está por encima o por debajo del rango óptimo. En cuanto a la cantidad de alimento, el crecimiento será máximo con una alimentación "a saciedad". En las granjas marinas, debido a la imposibilidad de utilizar comederos de autodemanda y a la dificultad de determinar la "saciedad" de los peces, la "alimentación restringida" es la opción más razonable. La predicción del crecimiento de los peces resulta imprescindible para establecer las necesidades nutritivas y las tasas de alimentación de una forma científica, pero, además, la determinación de la curva de crecimiento de una especie, en unas condiciones dadas, es fundamental para establecer planes de producción en piscicultura intensiva (Querellou, 1984).

Existe una extensa bibliografía sobre modelos matemáticos para el crecimiento de peces. Una buena aproximación al estudio del problema general de ajustar el crecimiento de los peces a una curva teórica y su interpretación biológica, con especial referencia a la función de crecimiento de Von Bertalanffi, puede encontrarse en el trabajo de MOREAU (1987). En QUERELLOU, 1984, se propone un modelo de crecimiento para la lubina *Dicentrarchus Labrax* (Linneo, 1758) basado en la temperatura del agua en la fase de engorde. En el trabajo de CHO (1992) se propone una predicción del crecimiento usando un índice denominado Thermal Growth Coefficient o "*coeficiente de crecimiento térmico*" (*CCT*), que se define como

$$CCT = \frac{Pf^{\frac{1}{3}} - Pi^{\frac{1}{3}}}{\sum {}^{\circ}C\ \text{día}},$$

donde *Pf* es el peso final, *Pi* el peso inicial y $\sum {}^{\circ}C\ \text{día}$ es la suma de la temperatura media diaria en grados centígrados. La ventaja de este modelo radica en que, si se cumpliese que el valor de *CCT* es constante e independiente del peso corporal, una vez se dispone de información basada en datos reales de crecimiento en granja para una especie, la predicción de la ganancia de peso en un período dado sería posible usando la expresión

$$Pf = \left(Pi^{\frac{1}{3}} + CCT \cdot \sum {}^{\circ}C\ \text{día}\right)^{3}$$

El modelo es adecuado para el rango de temperaturas normales propias de cada especie y resulta necesario obtener valores reales de *CCT* para cada tipo de procedencia de los peces, condiciones de alimentación, manejo, etc. La predicción del crecimiento se realiza en función de las temperaturas medias del agua previstas en la zona, mientras que para un ciclo de crecimiento en marcha, la estimación de los pesos se realiza considerando la suma de temperaturas reales medidas en la instalación.

En el caso de la lubina, según se cita en diversos trabajos, por ejemplo QUERELLOU (1984), el crecimiento se interrumpe, en condiciones de cría intensiva, cuando la temperatura es inferior a 10º C. En la construcción de nuestro modelo, que utilizaremos para realizar simulaciones de crecimiento también en el caso de la lubina, supondremos que solo existe crecimiento diario si la temperatura media de dicho día es mayor de 10 grados, para una serie continuada de días $t_0, t_0+1, ..., t_0+h$, consideramos el modelo dado por

$$P(t_0 + h) = \left(P(t_0)^{\frac{1}{3}} + CCT \cdot \sum_{i=1}^{h} T(t_0 + i)\right)^{3}$$

donde *P(k)* es el peso en gramos del pez y *T*(*k*) es el máximo entre cero y la temperatura media diaria, en grados centígrados menos 10, en ambos casos en el día *k*. Por simplicidad, consideraremos $t_0=0$. De esta forma resulta

$$P(t) = \left(P(0)^{\frac{1}{3}} + CCT \cdot \sum_{i=1}^{t} T(i)\right)^{3}.$$

El modelo *CCT* planteado tiene un buen comportamiento para unas condiciones estables de temperatura controlada.

Material y métodos

Sin embargo, en realidad, el coeficiente *CCT* no es constante para una serie de días. Se ha estudiado el valor de *CCT*, calculándolo para distintas etapas de crecimiento de peces, sobre distintas muestras con temperaturas diarias prácticamente constantes; constatándose que los valores de *CCT* van disminuyendo inicialmente con el incremento inicial de la suma de temperaturas hasta estabilizarse en un valor aproximadamente constante. Esta particularidad ha llevado a plantear el posible ajuste del valor del *CCT* como variable dependiente en función de la suma de temperaturas. Se obtiene muy buena correlación con el modelo biparamétrico

$$CCT(t) = a + \frac{b}{\sum_{i=1}^{t} T(i)} \quad (1)$$

donde *a* y *b* son parámetros y $\sum_{i=1}^{t} T(i)$ es la suma de temperaturas medias diarias menos 10. Observemos que, al crecer la suma de temperaturas, el coeficiente *CCT*(*t*) se acerca al valor de *a*.

Se ha realizado el estudio sobre datos reales de crecimiento de lubina, alimentada con diferentes piensos experimentales, en condiciones de laboratorio (Zegrari, datos sin publicar). En la Tabla 1 se representan los valores obtenidos, para la lubina, de las constantes *a* y *b* en 8 tanques, indicándose los pesos medios iniciales, en gramos, en cada tanque así como una distinción entre piensos utilizados y los coeficientes de correlación correspondientes.

Tabla 1: Valores de *a* y *b* para el modelo (1)

	PESO INICIAL	PIENSO	*a*	*b*	Coef. Correlación
TANQUE 1	38.97	A	0,000917025	0,0974002	0,81929
TANQUE 2	30.32	A	0,00079078	0,184549	0,966421
TANQUE 3	38.65	B	0,000912032	0,292417	0,944163
TANQUE 4	30.11	B	0,000886385	0,204768	0,957661
TANQUE 5	38	C	0,000878026	0,131243	0,822457
TANQUE 6	29.72	C	0,000901668	0,115622	0,824741
TANQUE 7	34.88	D	0,000893538	0,171302	0,923739
TANQUE 8	30.16	D	0,000817785	0,114526	0,866785

A diferencia de lo que sucede con el *CCT,* los valores *a* y *b* sí son constantes. Este hecho nos lleva, de forma natural, a una reinterpretación del parámetro *CCT* y, como consecuencia, al desarrollo de un nuevo modelo. Si sustituimos la expresión obtenida para el *CCT*(*t*) en la expresión de *P*(*t*), obtenemos

$$P(t) = \left(P(0)^{\frac{1}{3}} + a \cdot \sum_{i=1}^{t} T(t) + b \right)^3 .$$

El modelo obtenido es idéntico al inicial salvo en la aparición de una nueva constante, *b*. El parámetro *a* es el coeficiente que determina, directamente, el aumento de peso por influencia de la temperatura del agua. Lo llamaremos CCT^*. La constante *b* es un coeficiente corrector que determina el aumento de peso de acuerdo con otros factores, en principio indeterminados. Lo llamaremos *F* . De esta forma, el modelo queda

$$P(t) = \left(P(0)^{\frac{1}{3}} + CCT^* \cdot \sum_{i=1}^{t} T(t) + F \right)^3 \quad (2)$$

El cálculo de las constantes, CCT^* (*a*) y *F* (*b*) se puede realizar, por el método de los mínimos cuadrados, a partir de datos reales del *CCT*(*t*) según el modelo (1) o, alternativamente, a partir de datos reales de pesos, también por mínimos cuadrados, a partir del modelo (2). En la Tabla 2 se expresan los valores obtenidos para el CCT^* y *F* en este último supuesto.

Tabla 2: Valores de CCT^* y *F* para el modelo (2)

	PESO INICIAL	PIENSO	CCT^*	F
TANQUE 1	38.97	A	0.000897653	0.116375
TANQUE 2	30.32	A	0.000851908	0.093041
TANQUE 3	38.65	B	0.000831777	0.291552
TANQUE 4	30.11	B	0.000897653	0.125681
TANQUE 5	38	C	0.000815773	0.232579
TANQUE 6	29.72	C	0.000883716	0.124430
TANQUE 7	34.88	D	0.000883702	0.4534680
TANQUE 8	30.16	D	0,000834410	0.0574189

Los valores de CCT^* y F de la Tabla 2, lógicamente, mejoran el error cuadrático medio del peso estimado respecto del peso real. Aunque el objetivo del presente trabajo no es el de analizar el significado biológico de los parámetros del modelo, podemos observar que, para cada grupo de tanques con el mismo pienso, el parámetro F va en concordancia con el peso inicial, en el sentido de que a un peso inicial mayor, corresponde un parámetro F mayor, mientras que el valor del CCT^* es bastante similar en la mayoría de los casos.

Para una mejor adaptación a las condiciones reales en que se suelen producir los procesos de crecimiento, se ha optado por considerar, en un principio, las temperaturas medias diarias como variables aleatorias. En una segunda etapa se ha establecido la hipótesis de que tanto las temperaturas diarias como el peso inicial son variables aleatorias. Ambas consideraciones llevan a modelos probabilísticos para el peso final. Esto significa que el modelo proporcionará una distribución de probabilidad de la variable aleatoria peso, $P(t)$.

Resultados y discusión

- **Modelo CCT con temperaturas aleatorias**

Para cada instante i, se considera cada temperatura diaria, $T(i)$ como una variable aleatoria. Por lo tanto el peso final $P(i)$, también será una variable aleatoria. El modelo que desarrollamos permite la simulación del crecimiento de un pez genérico con peso inicial $P(0)$, que se considera constante.

Supongamos que $\hat{T}(i)$ es la temperatura media el día i, que se distribuye normal con media $\hat{\mu}_i$ y desviación típica $\hat{\sigma}_i$. Entonces la variable $T(i) = \hat{T}(i) - 10$ se distribuye normal con media $m_i = \hat{\mu}_i - 10$ y desviación típica $\hat{\sigma}_i$. Llamaremos

$$T^{(t)} = \sum_{i=1}^{t} T(i) \quad , \quad \mu^{(t)} = \sum_{i=1}^{t} \mu_i \quad \text{y} \quad \sigma^{(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{t} \hat{\sigma}_i^2} \; .$$

Se tendrá que $T^{(t)}$se distribuirá normal con media $m^{(t)}$ y desviación típica $s^{(t)}$. En consecuencia, $P(t)$ será una variable aleatoria función de la variable aleatoria $T^{(t)}$, con esperanza matemática (media)

$$E\left(P(t)\right) = \left(P(0)^{\frac{1}{3}} + \mu^{(t)} CCT^* + F\right)^3 + 3\left(\sigma^{(t)}\right)^2 \left(P(0)^{\frac{1}{3}} + \mu^{(t)} CCT^* + F\right) \cdot CCT^{*2}$$

y desviación típica

$$\sigma_{P(t)} = \left(15\,\sigma^{(t)6}\,CCT^{*6} + 36\,\sigma^{(t)4}\left(P(0)^{\frac{1}{3}} + \mu^{(t)}CCT^{*} + F\right)^{2} CCT^{*4} + 9\,\sigma^{(t)2}\left(P(0)^{\frac{1}{3}} + \mu^{(t)}CCT^{*} + F\right)^{4} CCT^{*2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Aunque la variable P(t) no se distribuye, en principio, normal; al ser función de la variable suma de temperaturas, que si que se distribuye normal, podemos establecer fácilmente los percentiles teóricos. Por ejemplo, el percentil de orden β, $0 < \beta < 100$ viene dado por

$$Per_{\beta}(P(t)) = \left(P(0)^{\frac{1}{3}} + CCT^{*}\cdot\left(\mu^{(t)} + \sigma^{(t)}\,Z_{\alpha}\right) + F\right)^{3}$$

donde $\alpha = 1 - \frac{\beta}{100}$ y Z_{α} es el valor crítico que acumula una probabilidad $\beta = 1 - \alpha$ para una variable aleatoria distribuida normal con media cero y desviación típica 1. Los intervalos de confianza para $P(t)$, a nivel de significación α prefijado, vienen dados por $[u_t, v_t]$ con

$$u_t = \left(P(0)^{\frac{1}{3}} + CCT^{*}\cdot\left(\mu^{(t)} - \sigma^{(t)}\,Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) + F\right)^{3},$$

$$v_t = \left(P(0)^{\frac{1}{3}} + CCT^{*}\cdot\left(\mu^{(t)} + \sigma^{(t)}\,Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) + F\right)^{3}.$$

La utilización del modelo para la simulación exige el conocimiento previo de: los coeficientes CCT^{*} y F, las temperaturas medias diarias y de la desviación típica de las mismas y, por último, del peso inicial. Se ha programado este modelo, usando el paquete MATLAB.

Como ejemplo, simularemos el crecimiento teórico de un pez del Tanque 6 con peso inicial de 30 gr. durante 221 días, divididos en 7 periodos.

Tabla 3

Periodo	Nº dias	Tª. Media diaria (º C)	Desviación típica
1	36	23	1.5
2	31	25	1.5
3	31	27	1.5
4	29	29	1.5
5	32	30	1.5
6	29	26	1.5
7	33	24	1.5

Figura 1

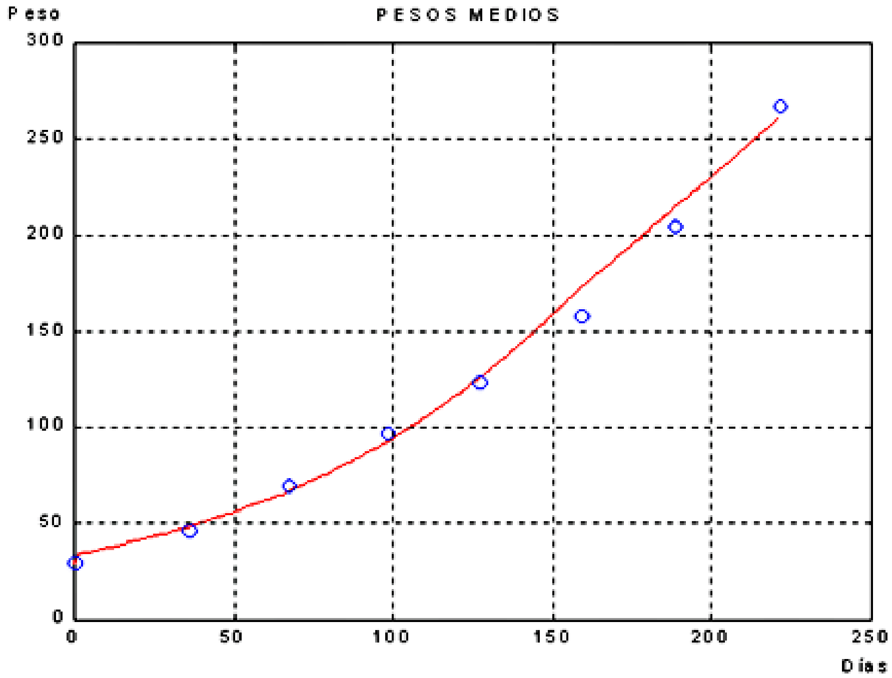
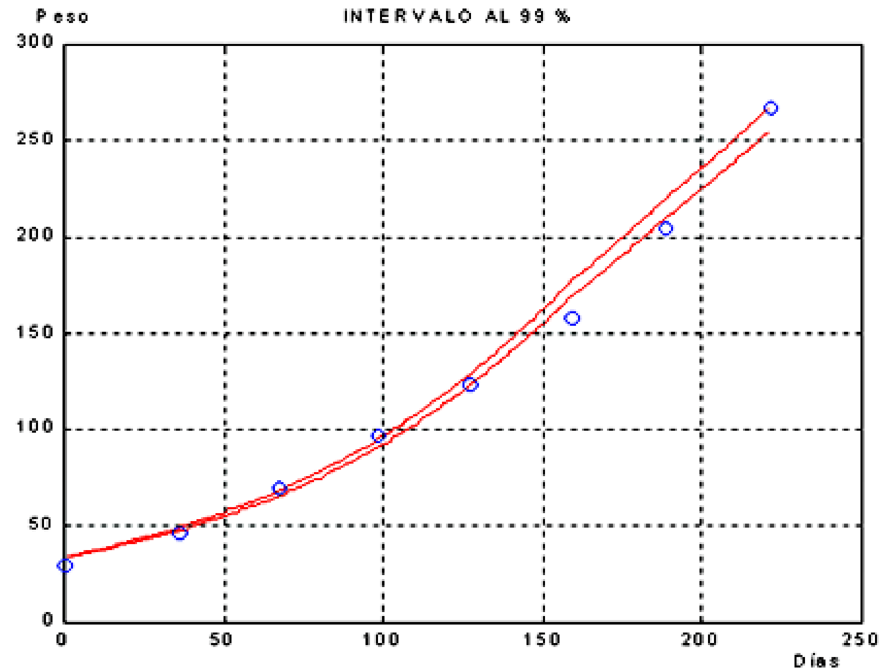


Figura 2



Para realizar la simulación se ha considerado CCT^{*}=0.000884 y F=0.124430 . En los gráficos anteriores, los círculos corresponden a pesos reales obtenidos, a partir de un peso medio inicial de 29.72 gr., en las condiciones de crecimiento correspondientes al Tanque 6. En la Figura 1 se muestra el gráfico correspondiente a los pesos medios esperados a lo largo del periodo. En la Figura 2 se representa una banda en la cual debe estar el peso del pez, en cada instante, con una la probabilidad de 0.99.

- **Modelo CCT con peso inicial y temperaturas aleatorias.**

En este caso se añadirá la hipótesis de que $P(0)$ es una variable aleatoria con el objetivo de poder estimar la producción total a partir del peso medio de los peces de un tanque.
Por lo tanto, *P(t)* representa una variable aleatoria función de otras dos, $P(0)$

y $\sum_{i=1}^{t} T(i)$. Esto provoca que el cálculo del valor esperado de *P(t)* sea complejo desde el punto de vista analítico. Lo mismo sucede con el cálculo de la varianza de *P(t)*. En esta situación, resulta adecuada la utilización de un método de simulación tipo Montecarlo. El método consiste en, conociendo la distribución del peso inicial de un pez y la de las temperaturas medias diarias, simular el crecimiento del pez a partir de la generación de valores aleatorios para el peso inicial y las temperaturas. Las simulaciones se realizan hasta que el error estándar sea menor que un límite prefijado de antemano. Mediante este procedimiento, al igual que en el caso de pesos iniciales constantes, obtendremos pesos medios esperados, percentiles e intervalos de confianza. La utilización de esta versión del modelo para la simulación exige el conocimiento previo de: los coeficientes CCT^* y F, las temperaturas medias diarias y de la desviación típica de las mismas y, por último, de los parámetros que definen la distribución del peso inicial.

Como ejemplo, se ha simulado el crecimiento de un pez, correspondiente a los tanques 5 o 6, suponiendo un peso inicial, $P(0)$ que se distribuye normal con media 34 y desviación típica 5. Como valores de CCT y F se tomarán los promedios obtenidos para los dos tanques, es decir CCT=0.00085, y F=0.179. Se suponen unos periodos de tiempo y temperaturas análogos a los descritos en la Tabla 3 y un error estándar máximo para el peso medio de 10 gr.

Figura 3

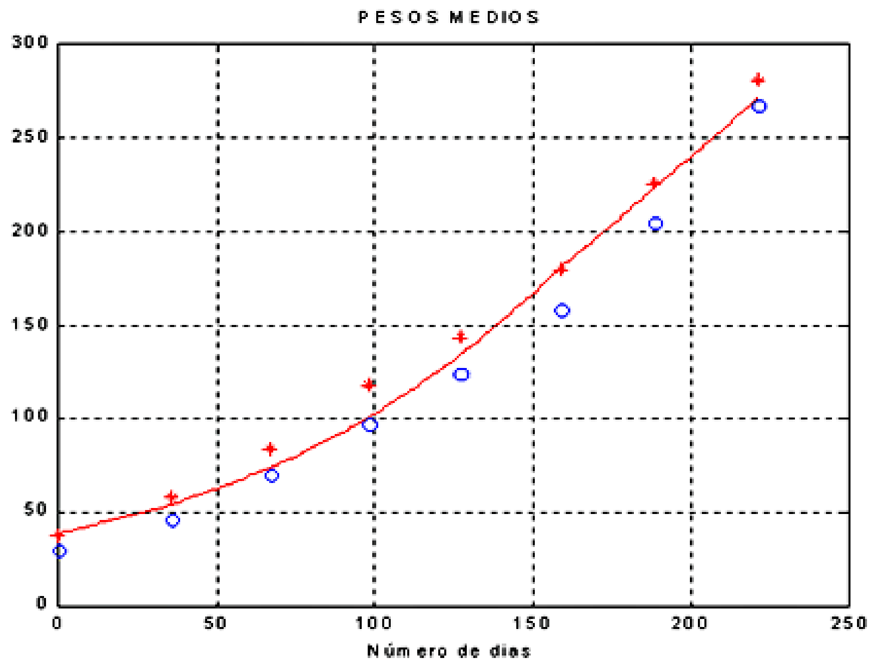
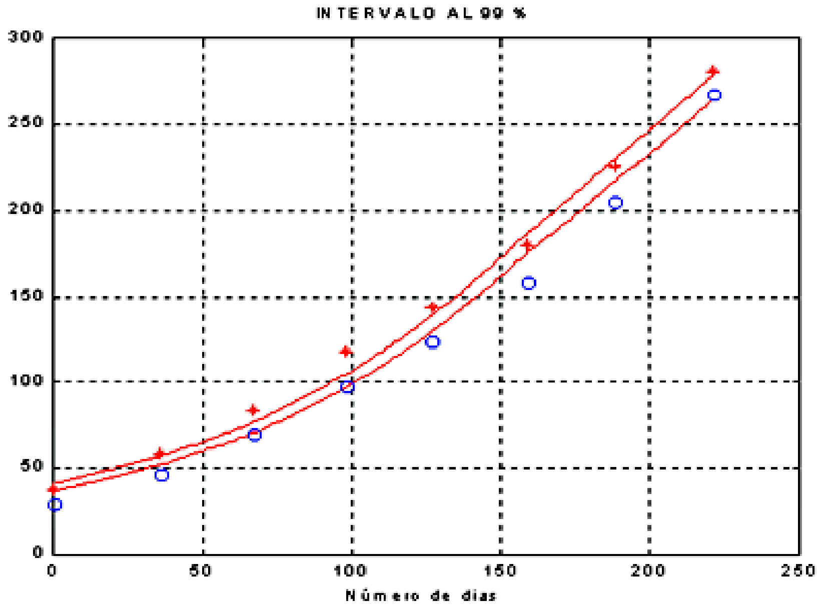


Figura 4



En las figuras 3 y 4, las aspas y los círculos corresponden a pesos reales obtenidos a partir de pesos iniciales de 38 y 29.72 gr., respectivamente, en las condiciones de crecimiento (idénticas) correspondientes a los tanques 5 y 6.

Actualmente, se está investigando en la línea de estudiar la aplicación del modelo propuesto a la simulación del crecimiento para el caso concreto de la cría de lubinas en un granja marina. Nuestro primer objetivo es ajustar los valores CCT^* y F para distintas situaciones de pesos iniciales y distintos tipos de alimentación. En una segunda fase, se integrará este modelo en uno más complejo que permita estimar el rendimiento económico de la producción en distintas épocas del año.

Bibliografía

- **Cho, C.Y.** (1992). Feeding systems for rainbow trout and other salmonids with reference to current estimates of energy and protein requirements. *Aquaculture*, 100, pp.107-123
- **Moreau, J.** (1987). Mathematical and biological expression of growth in fishes: Recent trends and further developments. *The Age and Growth of Fish*, edited by Robert C. Summerfelt and Gordon E. Hall. The Iowa State University Press. pp. 81-113.
- **Querellou, J.** (1984). Modèles de production en piscicultur intensive: application à l'élevage de loup Dicentrarchus labrax L. *L' Aquaculture du Bar et des Sparidés*, G. Barnabé et Billard Ed., INRA Pub. pp. 483-494.

AquaTIC

Artículo publicado en la Revista AquaTIC nº 13 (especial VIII Congreso Nacional de Acuicultura), mayo 2001